$$= \frac{x - x^3 - x^2 - x}{x^2 + x + 1} = \frac{-x^2(x+1)}{x^2 + x + 1} \leq 0 \quad \text{car} \quad x \geq 0$$

2°/ f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$$f'(x) = \frac{1(1 + x + x^2) - x(2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + x + 1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	-1	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0

II-

1°/

a) On a : $U_0 = 1 > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n > 0$

On a : $\begin{cases} U_n > 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1 + U_n + U_n^2} \end{cases}$ d'où $U_{n+1} > 0$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n > 0$

b) $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n \leq 0$ (d'après I) 1°/)

$\begin{cases} (U_n) \text{ est une suite décroissante} \\ (U_n) \text{ est minorée par } 0 \end{cases}$

Donc (U_n) est convergente

On a : $\begin{cases} \ell = \lim U_n \\ U_{n+1} = f(U_n) \\ f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+ \\ \ell \geq 0 \end{cases}$ donc $\ell = f(\ell)$